$\boxed{1}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(2) RはAM上より$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{k}{2}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\vec{b}$

RはPQ上より$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\dfrac{m}{m+n}\vec{a}+(1-s)\dfrac{n}{m+n}\vec{b}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$は互いに平行でなく, $\vec{0}$でもないので, $\begin{cases}\dfrac{sm}{m+n}=\dfrac{k}{2}\\ \dfrac{(1-s)n}{m+n}=\dfrac{k}{2}\end{cases}$

これを解くと, $s=\dfrac{n}{m+n}$, $k=\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$となるので,

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{mn}{(m+n)^2}(\vec{a}+\vec{b})$

(3) (2)より$\dfrac{AR}{AM}=k=\dfrac{2mn}{(m+n)^2}$

(4) 線分PQ上の点をSと置くと,

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$とおける。$(0\leqq\alpha\leqq1)$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\alpha\dfrac{m}{m+n}\vec{a}+(1-\alpha)\dfrac{n}{m+n}\vec{b}$

Sが重心と一致すると仮定すると　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

よって, $\begin{cases}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\alpha m}{m+n}\\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{(1-\alpha)n}{m+n}\end{cases}$

$\dfrac{\alpha m}{m+n}=\dfrac{(1-\alpha)n}{m+n}$を解くと, $\alpha=\dfrac{n}{m+n}$

このとき, $\dfrac{1}{3}=\dfrac{mn}{(m+n)^2}$

$m^2-mn+n^2=0$　となり, $m>0$, $n>0$より

$m^2-mn+n^2=\left(m-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}n^2>0$となり, これを満たす$m$, nは存在しない。

以上より線分PQは三角形ABCの重心を通らない。

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=0$ (2) $f(0)=0$, $f(1)=0$

(3) $f(x)=\dfrac{(1-t^2)x^2+(t^2-1)x}{(t^2-1)x+1}=(1-t^2)\cdot\dfrac{x^2-x}{(t^2-1)x+1}$

$$f'(x)=(1-t^2)\frac{(2x-1)\{(t^2-1)x+1\}-(x^2-x)(t^2-1)}{\{(t^2-1)x+1\}^2}$$

$$=(1-t^2)\frac{(t^2-1)x^2+2x-1}{\{(t^2-1)x+1\}^2}$$

$$=(1-t^2)\frac{\{(t+1)x-1\}\{(t-1)x+1\}}{\{(t^2-1)x+1\}^2}$$

(ｉ) $t=\pm1$のとき$f(x)=0$より極値を持たない。

(ⅱ) $t\fallingdotseq\pm1$のとき,$f'(x)=0$を満たすxは$\dfrac{1}{t+1}$, $\dfrac{1}{1-t}$

ア) $0<t<1$のとき

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{t+1}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	極小	↗	

イ) $1<t$ のとき

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{t+1}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

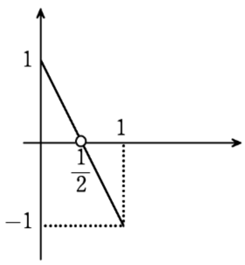
よって,極大値を取るtの範囲は$1<t$, 極小値を取るtの範囲は$0<t<1$

(4) $f\left(\dfrac{1}{t+1}\right)=\dfrac{\dfrac{1-t}{t+1}+t-1}{t}=\dfrac{(1-t)(-t)}{t(t+1)}=\dfrac{t-1}{t+1}=1-\dfrac{2}{t+1}$

$x=\dfrac{1}{t+1}$ $0<t<1$, $1<t$より$\dfrac{1}{2}<x<1$, $0<x<\dfrac{1}{2}$

$y=1-\dfrac{2}{t+1}$

よって, $y=1-2x$ $\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right.$, $\left.\dfrac{1}{2}<x<1\right)$



$\boxed{3}$

(1)　$P_n=\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{m}$

(2)　$E_n=\sum_{k=1}^{n}kP_k=\dfrac{k}{m}\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^{k-1}$

$S(n)=1\cdot1+2\cdot r+3\cdot r^2+\cdots+n\cdot r^{n-1}$とおくと,

$rS(n)=\qquad 1\cdot r+2\cdot r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$より

$(1-r)S(n)=1\cdot1+1\cdot r+1\cdot r^2+\cdots+1\cdot r^{n-1}-nr^n$

$$=\frac{1-r^n}{1-r}-nr^n=\frac{1-(1+n-nr)r^n}{1-r}$$

$$S(n)=\frac{1-(1+n-nr)r^n}{(1-r)^2}$$

よって, $E_n=\dfrac{S\left(\dfrac{m-1}{m}\right)}{m}=\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1-\left(1+n-\dfrac{m-1}{m}n\right)\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n}{\left(1-\dfrac{m-1}{m}\right)^2}$

$$=m\left\{1-\frac{m+n}{m}\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^n\right\}$$

$$=m-(m+n)\cdot\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$$

(3)　求める期待値は$\lim\limits_{n\to\infty}E_n$である。

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n=0$であるので, $\lim\limits_{n\to\infty}m\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n=0$

$0<\dfrac{m-1}{m}<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}nr^n=0$より$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\dfrac{m-1}{m}\right)^n=0$

よって, $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=m$

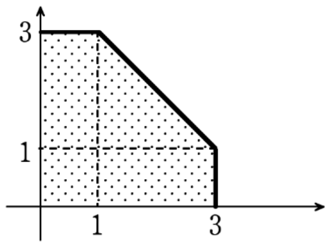
$\boxed{4}$

(1)　$z=t$の断面を考える。$(-3\leqq t\leqq 3)$

$|x|\leqq 3$, $|y|\leqq 3$, $|x|+|y|\leqq 4$, $|x|+|t|\leqq 4$, $|y|+|t|\leqq 4$, $|x|+|y|+|t|\leqq 5$

このとき, $(x , y)=(a , b)$で条件を満たすならば, $(x , y)=(a , \pm b)$, $(-a , \pm b)$でも成り立つので, まずはyz平面の第一象限の領域を考える。…①

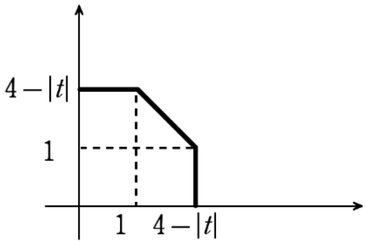
(ｉ)　$-1\leqq t\leqq 1$のとき



この領域の面積は長方形＋台形と考えて

$3+\frac{1}{2}(1+3)\cdot 2=7$

(ii)　$1\leqq t\leqq 3$, $-3\leqq t\leqq -1$のとき,



この領域の面積は長方形＋台形と考えて

$4-|t|+\frac{1}{2}(4-|t|+1)(3-|t|)=\frac{1}{2}(t^2-10|t|+23)$

以上より①を踏まえると,

$$\frac{V}{4}=\int_{-1}^{1}7dt+\int_{-3}^{-1}\frac{1}{2}(t^2-10|t|+23)dt+\int_{1}^{3}\frac{1}{2}(t^2-10|t|+23)dt=\frac{86}{3}$$

$$V=\frac{344}{3}$$

※ $t\geqq 0$についてのみ言及し, $\frac{V}{8}$を求めた方が計算課程は楽であるが, $-3\leqq t\leqq 3$について考えたときに(ii)において, $|t|$と書き損じている受験生もいるのではないかと思い, 今回はこちらを採用した。

(2)　(1)より, 立体Tの$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$を図示すると右図のようになるので,

A_1 , A_2 , A_3は正方形であるので,

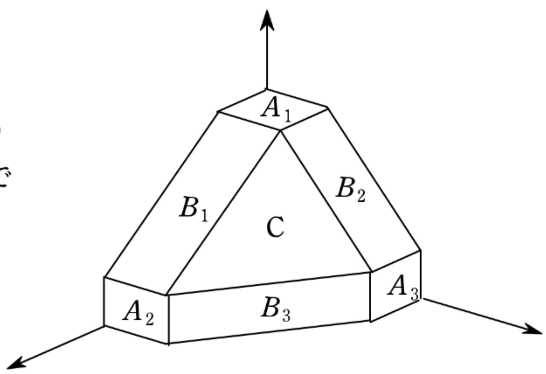
面積はそれぞれ$1\times 1=1$

B_1 , B_2 , B_3は長方形であり, B_1のyz平面上の頂点を考えると$(0 , 1 , 3)$, $(0 , 3 , 1)$であるので

面積はそれぞれ$1\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Cは１辺の長さが$2\sqrt{2}$の正方形であるので

面積は$\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$



以上より表面積は

$(3+6\sqrt{3}+2\sqrt{3})\times 8=24+48\sqrt{3}+16\sqrt{3}$

【講評】

大問１　平面ベクトルの問題。文字は多いが, 具体的な数値の問題であれば実に簡単な問題である。文字になってもきっちり解き切る問題慣れが必要であった。

大問２　微分（数Ⅲ）計算は面倒である。くくるところをキチンとくくれば許容範囲の計算量であるが、計算の工夫をせずに全て展開する等で行うとかなりの時間を要したであろう。

大問３　確率の問題。⑵は等差×等比の和で少し式が複雑であるので計算力が試される。⑶は極限の問題であり、定数と変数をキチンと判別して考えればできるが、差の付く問題であったかもしれない。

大問４⑴の体積ができたかどうかは合否に大きく関わるだろう。⑵はできたと思っている受験生でも線分の長さを積分して失敗した方が多かったのではないか。図を想像することも踏まえると厳しかったであろう。

目標は6割5分。