解答速報

医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX × 医学部受験予備校 医特

大阪医科薬科大学 一般選抜後期

数学

1 (1) $p_3=\dfrac{1}{4}$, $p_4=0$

(2) ゴールに到着していないときの奇数分後に動点Pが存在できる場所はB , Fのみ。

よって, $a_{2k-1}=b_{2k-1}=0$ (kは自然数)

ゴールに到着していないとき、偶数分後に動点Pが存在できる場所はA, C , Eのみ。

$2n$分後 ,$2n+2$分後の「A」「C , E」にいる確率を表にすると

	$2n$	$2n+2$
A	a_{2n}	$\dfrac{1}{2}a_{2n}+\dfrac{1}{4}b_{2n}$
C , E	b_{2n}	$\dfrac{1}{2}a_{2n}+\dfrac{1}{4}b_{2n}$

となり, $a_{2n+2}=b_{2n+2}=\dfrac{1}{2}a_{2n}+\dfrac{1}{4}b_{2n}$

かつ$a_2=\dfrac{1}{2}$, $b_2=\dfrac{1}{2}$となるので, 偶数分後も題意は成り立つ。

よって題意は示された。

(3) (2)より$b_{2n+2}=\dfrac{3}{4}b_{2n}$となり, $b_2=\dfrac{1}{2}$より$b_{2m}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{m-1}$

$p_{2m+1}=\dfrac{1}{2}b_{2m}$より$p_{2m+1}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{m-1}$

$\boxed{2}$ (1)　$0<x\leqq 1$のとき$|\log x|=-\log x$より

(右辺)$-$(左辺)$=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\log x=g(x)$　とおくと

$g'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1+\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}}$となり, $0<x<1$で$g'(x)<0$

また, $g(1)=3$より$0<x<1$で$g(x)>0$

よって, (右辺)$>$(左辺)

(2)　$0<x<1$のとき,

$f(x)=x(\log|x|)^2=x(\log x)^2$

(1)より, $(\log x)^2<\dfrac{9}{\sqrt[3]{x^2}}$となるので,

$0<f(x)<\dfrac{9x}{\sqrt[3]{x^2}}=9\sqrt[3]{x}$　$\lim\limits_{x\to+0}9\sqrt[3]{x}=0$

よって, はさみうちの原理より$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$

また, $f(-x)=-f(x)$より$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=0$

以上より$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

(3)

$$\int_t^{-2}\frac{dx}{f(x)}=\int_t^{-2}\frac{dx}{x(\log|x|)^2}=\left[\frac{1}{\log|x|}\right]_t^{-2}=\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log|t|}$$

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^{-2}\frac{dx}{f(x)}=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log|t|}\right)=\frac{1}{\log 2}$$

$\boxed{3}$ (1)

Dは平面ABC上より

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=(2-2s,\ 2s+2t,\ 4t)$

また, OD$\perp$平面ABCより

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって,

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-2s,\ 2s+2t,\ 4t)\cdot(-2,\ 2,\ 0)=4-8s-4t=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2-2s,\ 2s+2t,\ 4t)\cdot(0,\ 2,\ 4)=4s+20t=0$

以上より$s=\dfrac{5}{9},\ t=-\dfrac{1}{9}$

よって, $\mathrm{D}\left(\dfrac{8}{9},\ \dfrac{8}{9},\ -\dfrac{4}{9}\right)$

(2)

三角形ABCの面積は$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=6$

(1) よりOD$=\dfrac{4}{9}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=\dfrac{4}{3}$

よって, 四面体OABCの体積は$\dfrac{1}{3}\cdot6\cdot OD=\dfrac{1}{3}\cdot6\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

また, 三角形OAB, 三角形OAC, 三角形OBCの面積を三角形ABCと同様に求めれば

それぞれ 2, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$

また, 内接する球の中心をP,半径をrとおく。

(四面体OABCの体積)=(四面体POABの体積)+(四面体POACの体積)

+(四面体POBCの体積)+(四面体PABCの体積)

より $\dfrac{8}{3}=\dfrac{1}{3}(6+2+2\sqrt{5}+2\sqrt{5})\cdot r$

$$r=\frac{8}{8+4\sqrt{5}}=2(\sqrt{5}-2)\quad\cdots(答)$$

$\boxed{4}$ (1) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\log x}} e^{t^2}dt=e^{(\sqrt{\log x})^2}\cdot(\sqrt{\log x})'$

$$=x\cdot\frac{1}{\sqrt{\log x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{\log x}}$$

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{\log p}}^{\sqrt{\log q}} e^{x^2}dx=f(q)-f(p)=\int_p^q f'(x)dx$ であるので,

(1) より $g(x)=f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\log x}}$

(3) $\displaystyle\int_a^b\sqrt{\log x}\,dx=\Big[x\cdot\sqrt{\log x}\Big]_a^b-\int_a^b x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\log x}}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=b\sqrt{\log b}-a\sqrt{\log a}-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{\log x}}dx$$

$1<a<b$ より (2) が使える。

よって, $\displaystyle\int_{\sqrt{\log a}}^{\sqrt{\log b}} e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{\log x}}dx$

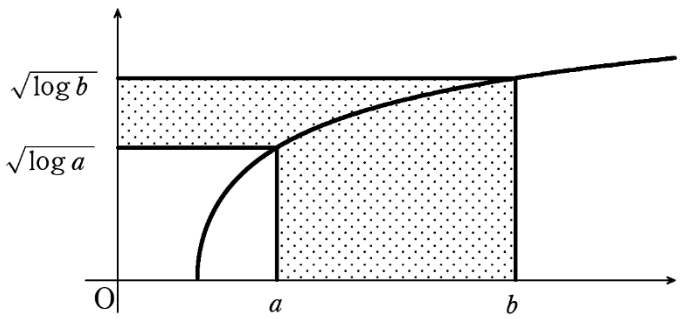
以上より (与式)$=b\sqrt{\log b}-a\sqrt{\log a}$ $\cdots$(答)

別解) $y=\sqrt{\log x}\Leftrightarrow y^2=\log x\Leftrightarrow e^{y^2}=x$ となるので,

$y=\sqrt{\log x}$ と $y=e^{x^2}$ は逆関数。

よって,求める定積分は以下の斜線部となり,

(与式)$=b\sqrt{\log b}-a\sqrt{\log a}$ $\cdots$(答)



【講評】

大問１　確率漸化式の問題。n を偶数・奇数に分けることができたかがポイントだろう。

大問２　(1)は｜logx|がきちんと処理できたか？(2)は+0 と-0 に分けることができたかが差になっただろう。(3)は解き切りたい。

大問３　空間ベクトルの問題。平面ＡＢＣに垂線を下ろす、四面体の内接球といった標準的な問題なので、これは落とせない。

大問４　(1)は定積分関数の微分。取り切りたい。(2)ができたかが大きな差になったかもしれない。

目標は７割後半。