問題１

（１）アイ　20　（２）$\dfrac{ウ}{エ}$　$\dfrac{1}{3}$　（３）オカ　27　キク　54

（４）ケ　2　（５）$\dfrac{コ}{サ}$　$\dfrac{4}{9}$　（６）$\dfrac{シス}{セソタ}$　$\dfrac{41}{216}$

（７）チ　6　ツ　1　テ　3　（８）$\dfrac{トナ}{ニヌネ}$　$\dfrac{81}{220}$

（９）ノハ　-8　（10）ヒフ　36

問題２

(1)　(ii)の条件より点Pの軌跡は焦点C、準線x軸の放物線であることがわかる。

従って点Pの軌跡でy座標が最小となる点Qは点Cからx軸へおろした垂線の足Hとして

CHの中点となる。

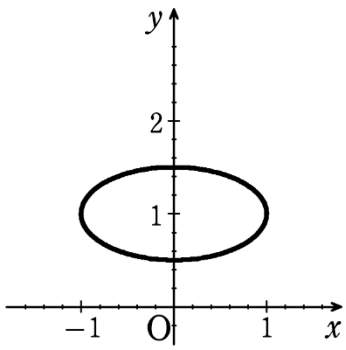
点Cの座標を$C(\cos\theta, 2+\sin\theta)$とパラメーターを用いておくと

点Qの座標は$Q\left(\cos\theta, \dfrac{1}{2}(2+\sin\theta)\right)$となる。

点Qの軌跡なので

$X=\cos\theta$、$Y=\dfrac{1}{2}(2+\sin\theta)$　を　$\cos\theta=X$　$\sin\theta=2Y-2$　と変形して

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　に代入して整理すると$X^2+\dfrac{(Y-1)^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$　となる。



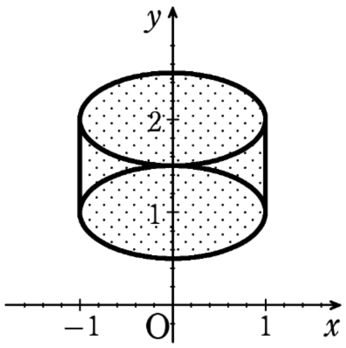
(2)　(1)と同様にして点Cの座標を$C(\cos\theta, s+\sin\theta)$とおく

点Qの座標は$Q\left(\cos\theta, \frac{1}{2}(s+\sin\theta)\right)$であり

その軌跡は$X^2+\dfrac{\left(Y-\frac{s}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$となる、

つまり求める領域は　(1)　で求めた楕円の中心が (0,1) から (0,2) まで

y軸方向に平行移動した領域であることがわかる。



よって求める面積は

楕円の面積と長方形の面積の和と

考えることができるので

$1\times2+1\times\frac{1}{2}\pi=2+\frac{1}{2}\pi$

(3)　領域Dの上側の楕円の方程式は$y=2+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$と変形でき、

下側の楕円の方程式は$y=1-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$と変形できる。

よって求める体積は

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(2+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(3+3\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$=6\pi\int_{0}^{1}dx+6\pi\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=6\pi+6\pi\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=6\pi+\frac{3}{2}\pi^2$$

問題３

(1)　$f(u)=au^4+bu^3+cu^2+du+e$ とおく。

$\displaystyle\int_x^{x+1} f(u)\,du=x^4$ の両辺を x で微分して，

$$f(x+1)-f(x)=4x^3$$

$$4ax^3+(6a+3b)x+(4a+3b+2c)x+(a+b+c+d)=4x^3$$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases} 4a=4 \\ 6a+3b=0 \\ 4a+3b+2c=0 \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$$

これを解いて，　$a=1\,,\,b=-2\,,\,c=1\,,\,d=0$

よって，$\displaystyle\int_x^{x+1}(u^4-2u^3+u^2+e)du=x^4$

この式は，任意の x について成り立つので，　$x=0$ を代入して，

$$\int_0^1(u^4-2u^3+u^2+e)du=0$$

$$\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^4}{2}+\frac{u^3}{3}+eu\right]_0^1=0$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+e=0$$

$$e=-\frac{1}{30}$$

したがって，　$f(u)=u^4-2u^3+u^2-\dfrac{1}{30}$

このとき，確かに $\displaystyle\int_x^{x+1} f(u)\,du=x^4$ を満たす.

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4=1^4+2^4+3^4+\cdots+(n+1)^4$

$$=\int_1^2 f(u)\,du+\int_2^3 f(u)\,du+\int_3^4 f(u)\,du+\cdots+\int_n^{n+1} f(u)\,du$$

$$=\int_1^{n+1} f(u)\,du$$

$$=\int_1^{n+1}\left(u^4-2u^3+u^2-\frac{1}{30}\right)du$$

$$=\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^3}{3}-\frac{u}{30}\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

(3) $$1^4+3^4+5^4+\cdots+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^4-\{2^4+4^4+\cdots+(2n)^4\}$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}k^4-16\sum_{k=1}^{n}k^4$$

であるから，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{7}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^4$$
$$=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{2n}k^4-\sum_{k=1}^{n}k^4$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{32n^5}{5}+8n^4+\frac{8n^3}{3}-\frac{n}{15}\right)-\left(\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}\right)$$
$$=\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{7}{240}n$$

【講評】

問題１

（６）の確率（７）の整数問題の２つが難しかったか。

問題２

問題文の条件から、点Pの軌跡が放物線であることを読み解けるかが鍵。そこをクリアできれば、（１）（２）は解けるだろう。（３）は、本解答では手順を踏んで求めたが、数値を出すだけであれば、パップスギルダンの公式を使えば求められた。

問題３

問題自体は優しいが、計算が面倒な問題で、計算力が問われた。

合格を考えるなら、問題１を１０問中８問は解いておきたい。加えて問題２、もしくは問題３を完答し、全体としては７割を確保しておきたい。