大阪医科薬科大学 一般選抜前期 数学

［1］

(1) 全ての自然数nに対して$a_n \geqq 2$であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$の時$a_1=2 \geqq 2$より成立している

(ii) $n=k$の時$a_k \geqq 2$が成立していると仮定すると

$n=k+1$の時

$$a_{k+1}=\frac{2a_k+5}{a_k+2}=2+\frac{1}{a_k+2} \geqq 2 \quad (\because a_k+2>0)$$

となり$n=k+1$の時も成立している。

(2) $$(a_{n+1}-\sqrt{5})\cdot(a_n-\sqrt{5})=\left(\frac{2a_n+5}{a_n+2}-\sqrt{5}\right)\cdot(a_n-\sqrt{5})=(2-\sqrt{5})\cdot(a_n-\sqrt{5})^2 \leqq 0$$

と変形できるので

$a_n<\sqrt{5}$ならば$a_{n+1}>\sqrt{5}$であり、$a_n>\sqrt{5}$ならば$a_{n+1}<\sqrt{5}$であるといえる。

(3) $$|a_{n+1}-\sqrt{5}|=\left|\frac{2a_n+5}{a_n+2}-\sqrt{5}\right|=\left|\frac{(2-\sqrt{5})(a_n-\sqrt{5})}{a_n+2}\right|=\left|\frac{(2-\sqrt{5})}{a_n+2}\right|\cdot|a_n-\sqrt{5}|$$

$$\leqq\frac{(\sqrt{5}-2)}{4}\cdot|a_n-\sqrt{5}|$$

(4) (3)より全ての自然数nに対して

$|a_{n+1}-\sqrt{5}| \leqq \dfrac{(\sqrt{5}-2)}{4}\cdot|a_n-\sqrt{5}|$が成立しているので、

繰り返していくと　$|a_n-\sqrt{5}| \leqq \left\{\dfrac{(\sqrt{5}-2)}{4}\right\}^{n-1}|a_1-\sqrt{5}|$

ここで　$0<\dfrac{(\sqrt{5}-2)}{4}<1$　より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(\sqrt{5}-2)}{4}\right\}^{n-1}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{5})=0$　以上より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{5}$

[2]

（1） xz 平面に関してAと対称な点 A′ を考える。

$A'(2,\ -1, 3)$

Pが xz 平面上を動いても $AP=A'P$ が常に成立する。

よって

$AP+PB=A'P+PB \geqq A'B$

最小値は A′B である。

$\overrightarrow{A'B}=(-1, 4, 1) \qquad |\overrightarrow{A'B}|=\sqrt{1+16+1}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+p\overrightarrow{A'B}$

$=(2,\ -1, 3)+p(-1, 4, 1)$

y成分 $=0$ に着目して、 $p=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\quad P\left(\dfrac{7}{4}, 0, \dfrac{13}{4}\right)$

（2） （1）と同様に yz 平面に関してBと対称的な点 B′ を考える。

$B'(-1, 3, 4)$

Qが yz 平面上を動いていても $QB=QB'$ が常に成立する。

よって

$AP+PQ+QB=A'P+PQ+QB' \geqq A'B'$

最小値は A′B′ である。

$\overrightarrow{A'B'}=(-3, 4, 1) \qquad |\overrightarrow{A'B'}|=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$

A′B′ 上の点Rは

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{A'B'}$

$=(2,\ -1, 3)+t(-3, 4, 1)=(2-3t,\ -1+4t, 3+t)$

Pは y成分 $=0$ より、 $t=\dfrac{1}{4} \quad \therefore\quad P\left(\dfrac{5}{4}, 0, \dfrac{13}{4}\right)$

Qは x成分 $=0$ より、 $t=\dfrac{2}{3} \quad \therefore\quad Q\left(0, \dfrac{5}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$

[3]

(1) $h(x)=\dfrac{e^{x-a}+e^{-x+a}}{2}+b-x$ より

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x-a}+e^{-x+a}}{2}+b-x\right)=\lim_{x\to\infty} e^{x}\cdot\left(\frac{e^{-a}+e^{-x+a}}{2}+\frac{b}{e^{x}}-\frac{x}{e^{x}}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x-a}+e^{-x+a}}{2}+b-x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-t-a}+e^{t+a}}{2}+b+t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty} e^{t}\cdot\left(\frac{e^{-2t-a}+e^{a}}{2}+\frac{b}{e^{t}}+\frac{t}{e^{t}}\right)=\infty$$

(2) $h'(x)=\dfrac{e^{x-a}-e^{-x+a}}{2}-1$　$h'(x)\geqq 0$　とすると

$\dfrac{e^{x-a}-e^{-x+a}}{2}-1\geqq 0$

$e^{x-a}-e^{-x+a}\geqq 2$　ここで$e^{x-a}=X$　とおくと

$X-\dfrac{1}{X}\geqq 2$　より　$X^2-2X-1\geqq 0$　$X>0$　と併せて考えて　$1+\sqrt{2}\leqq X$

$1+\sqrt{2}\leqq e^{x-a}$　$\log(\sqrt{2}+1)\leqq x-a$　　$a+\log(\sqrt{2}+1)\leqq x$

接しているとき$h(x)$の極小値$=0$

よって　$h(a+\log(\sqrt{2}+1))=\dfrac{\sqrt{2}+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}{2}+b-a-\log(\sqrt{2}+1)=0$

整理すると$b=a-\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)$

(3) (2)を利用して2点で交わる場合は$h(x)$の極小値<0

よって求める条件は$b<a-\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)$

[4]

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ かつ $0\leqq r\leqq\pi$ のとき、$0\leqq x\leqq\pi$

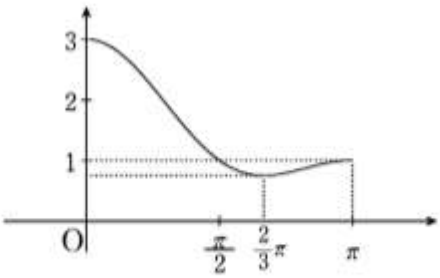
$y=\cos^2 x+\cos x+1$

$y'=-2\cos x\sin x-\sin x=-\sin x(2\cos x+1)$

$y'=0$ のとき、$x=0,\dfrac{2}{3}\pi,\pi$

増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'	0	$-$	0	$+$	0
y	3	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1



(2) $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき $\dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 、$\dfrac{\pi}{4}\leqq r\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos r\geqq 0$ より、

$\dfrac{1}{2}\cos^2 r+\dfrac{1}{2}\cos r+1\leqq y\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 r+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos r+1$

求める面積を S とすると、

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 r+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos r+1\right)-\left(\frac{1}{2}\cos^2 r+\frac{1}{2}\cos r+1\right)\right\}dr$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 r+\cos r)dr=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}r+\frac{1}{4}\sin 2r+\sin r\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{16}(\sqrt{2}-1)(\pi+6-4\sqrt{2})$$

～講評～

大問 1　漸化式と極限の問題。最終的にはさみうちの原理を用いて極限を求める問題でしたが、類題を解いたことのある受験生も多かったでしょう。

大問 2　空間座標における折れ線の長さの和の最小値を求める問題。対称な点を求めて直線で結ぶだけの典型問題でした。ここは完答してほしい。

大問 3　指数関数のグラフに関する問題。ただ微分するだけで、やや計算が面倒なだけの問題でした。

大問 4　媒介変数で表された関数の問題。(1) は変曲点を具体的に求めることはできませんが、$x=0$、π のとき微分係数が 0 になることには注意が必要です。(2) はまず r を固定し、積分を用いて面積を求める問題でした。

昨年度までは 100 分大問 5 問の出題でしたが、今年度から 90 分大問 4 問の出題となりました。難易度はやや易化。［2］［3］を完答し、［1］［4］からできるだけもぎ取るという形で、ボーダーは 7 割程度になると思われます。