解答速報

医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX

東京女子医科大学　一般選抜　数学

※東京女子医科大学解答速報は、メルリックス学院に所属する受験生からの聞き取りを行い、問題を再現して作成しました。実際の問題と相違があることが考えられるため、予めご了承ください。

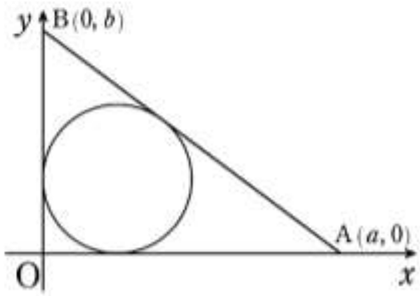
2

xy 平面にA$(a, 0)$、B$(0, b)$、O$(0, 0)$があり、三角形ABOに半径 r の円が内接している。a、b は共に自然数であり、$a > b$ である。半径 r の円の中心をRとする。

(1) 中心Rの座標を a、b を用いて表せ。

(2) 中心Rの座標が$(4, 4)$のとき、自然数 a、b に考えられる組合せを答えよ。

解答



(1) OAとの接点をP、OBとの接点をQ、ABとの接点をRとする。

△OABが直角三角形であることから、

OP＝OQ＝r

頂点から各接点までの距離は等しいので、

AP＝AR、BQ＝BR

$$\mathrm{OP}+\mathrm{AP}=a \Longrightarrow \mathrm{AR}=a-r$$

$$\mathrm{OQ}+\mathrm{BQ}=b \Longrightarrow \mathrm{BQ}=b-r$$

$$\mathrm{AR}+\mathrm{BR}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad a-r+b-r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$2r=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$$

$$r=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

よって、$\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2},\ \dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)$

(2) $\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=4$

$a+b-\sqrt{a^2+b^2}=8$

$a+b-8=\sqrt{a^2+b^2}$

$a^2+b^2+64+2ab-16b-16a=a^2+b^2$

$2ab-16a-16b+64=0$

$ab-8a-8b+32=0$

$(a-8)(b-8)-64+32=0$

$(a-8)(b-8)=32$

$a-8>b-8$ に留意すると

$a-8$	32	16	8
$b-8$	1	2	4

$\therefore\quad (a,b)=(40,9),\ (24,10),\ (16,12)$

別解

(1) 条件より、求める円の中心はR (r,r) とわかる。

内接円の半径は三角形の面積と周の長さから求める。

$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$ より

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r(a+b+\sqrt{a^2+b^2})$$

$$\therefore\quad r=\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore\quad \mathrm{R}\left(\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

(2) $\dfrac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}=4 <=> ab=4a+4b+4\sqrt{a^2+b^2}$

$<=> ab-4a-4b=4\sqrt{a^2+b^2}$

両辺を2乗して、

$a^2b^2+16a^2+16b^2-8a^2b+32ab-8ab^2=16a^2+16b^2$

$a^2b^2-8a^2b-8ab^2+32ab=0$

a,b が自然数より、 $ab\fallingdotseq 0$

$ab-8a-8b+32=0$

$(a-8)(b-8)-64+32=0$

$(a-8)(b-8)=32$

$a-8>b-8$ に留意すると

$a-8$	32	16	8
$b-8$	1	2	4

$\therefore\quad (a,b)=(40,9),\ (24,10),\ (16,12)$

$\boxed{3}$

サイコロを同時に3つ投げるとき、以下の確率をそれぞれ求めよ。

(1) 2つが同じ目で、1つが異なる目になる確率。

(2) $1, 2, 3$ や $2, 3, 4$ のように、連続する目となる確率。

(3) 以下の条件をいずれも満たさなくなるまでサイコロを投げるとき、r 回以内に試行が終わる確率。

条件1． 3つのうち、少なくとも2つが同じ目

条件2． 3つとも異なる目で、$1, 2, 3$ や $2, 3, 4$ のように連続する目

解答

(1) 3つのサイコロを振る全事象は $6^3=216$

2つの目が同じで、1つが異なる目の組合せは

$6\times5=30$ 通り

並び替えは $\dfrac{3!}{2!}=3$ のため、$30\times3=90$ 通り

$\therefore\ \dfrac{90}{216}=\dfrac{5}{12}$

(2) 連続する3つの目の組合せは $(1, 2, 3)(2, 3, 4)(3, 4, 5)(4, 5, 6)$ の4通り。

並び替えは $3!=6$ のため、$4\times6=24$ 通り

$\therefore\ \dfrac{24}{216}=\dfrac{1}{9}$

※条件付確率を求める場合は

$\dfrac{24}{6\times5\times4}=\dfrac{1}{5}$

(3) 条件1：少なくとも2つの目が同じである確率は、余事象を考えると、

$1-\dfrac{6}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{4}{9}$

条件2： (2) より $\dfrac{1}{9}$

条件1と条件2は排反な事象なので、いずれかが発生する確率は

$\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{9}$

r 回以内に終了する事象の余事象を考えると、

$1-\left(\dfrac{5}{9}\right)^r=\dfrac{9^r-5^r}{9^r}$

$\boxed{4}$

(1) $\dfrac{\log x}{x}$ の増減及び極値を調べよ。

(2) $m^n=n^m\ (m>n)$ となる自然数 m, n の組合せを求めよ。

(3) 23^{24}, 24^{23} の大小を求めよ。

解答

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと、真数条件より $x>0$

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より、$0<x\leqq e$ において $f'(x)\geqq0$ で単調増加、$e\leqq x$ において $f'(x)\leqq0$ で単調減少

よって、$f(e)=\dfrac{1}{e}$

$\therefore\ x=e$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$

(2) 両辺の自然対数を取って、

$$m^n = n^m \iff n\log m = m\log n$$

$$\iff \frac{\log m}{m} = \frac{\log n}{n}$$

$$\iff f(m) = f(n)$$

上記を満たす自然数 m, n となる。

(1) より $f(x)$ のグラフの概形を想像すれば、$n < e = 2,7\cdots\cdots$ より、$n = 1$ または2

$n = 1$ のとき、$f(1) = 0$ で $f(m) = 0$ を満たす $m > e$ は存在しない。

$n = 2$ のとき、$f(2) = \dfrac{\log 2}{2}$

また、$f(4) = \dfrac{\log 4}{4} = \dfrac{\log 2}{2}$ より、$m = 4$

グラフの概形より、m が1つしか存在しないことは明らか。

$\therefore \quad (m, n) = (4, 2)$

(3) $f(x)$ の概形より、

$$f(23) > f(24) \iff \frac{\log 23}{23} > \frac{\log 24}{24}$$

$$\iff 24\log 23 \geqq 23\log 24$$

$$\iff 23^{24} > 24^{23}$$

$\therefore \quad 23^{24} > 24^{23}$

～講評～

大問２　この大学で頻出する、図形が絡む問題。(1) は面積を使う方法や接点と頂点の距離を使う方法などが考えられる。(2) は (1) が解ければ、典型的な整数問題に帰着できる。例年と比べると難易度は低いため、完答したい。

大問３　サイコロの確率の問題。(1) (2) は標準問題なので、完答したい。(3) はきちんと状況を把握できれば、それほど難しくはない問題であった。

大問４　数Ⅲの微分の問題。(1) は丁寧に微分するだけ。(2) (3) は頻出問題なので、類題を解いたことがある受験生も多かっただろう。

以上ではあるが、昨年度の合格最低点も踏まえれば、ボーダーは5～6割程度でないかと思われる。