解答速報

関西医科大学　一般選抜前期　数学

I

（1）$\alpha^n-1=0$

$(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha+1)=0$

$\alpha\fallingdotseq 1$ より

$\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha+1=0$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\beta=\beta(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+\alpha+1)=0 \qquad \because \quad \alpha^n=1$

（2）$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$\beta=\cos a+i\sin a$ とおくと、$\alpha\fallingdotseq 1$, $\alpha^n=1$ なので、

（1）より、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha^k\beta=0$

実部を取り出すと、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+a\right)=0$

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}+a\right)=0$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-a\right)=0$$

$$\begin{aligned}S_x{}^2&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{2\pi k}{n}+a\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\cos\left(\frac{4\pi k}{n}+2a\right)}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

同様に $S_y{}^2=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}S_{xy}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k}{n}+a\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi k}{n}-a\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{4\pi k}{n}+\cos 2a\right\}\\&=\frac{1}{2}\cos 2a\end{aligned}$$

∴　相関係数

$$r=\frac{S_{xy}}{S_x\cdot S_y}=\frac{\frac{1}{2}\cos 3a}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\cos 2a$$

Ⅱ

（1） $S_3=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

（2） 「S_n の要素は連結する 2^n 個の整数である」を①とする

[1] $n=1$ のとき、S_1 の要素は $\{0,\ 1\}$ の2個なので①は成立する。

[2] $n=k$ のとき、①が成立すると仮定。

（i） k が奇数のとき、S_{k+1} の要素は、$a_{k+1}=0$ ならば S_k の要素と等しく、$a_{k+1}=1$ ならば S_k の連続する 2^k 個の要素からそれぞれ 2^k を引いたものなので、$n=k+1$ のときも①は成立する。

（ii） k が偶数のとき、S_{k+1} の要素は、$a_{k+1}=0$ ならば S_k の要素と等しく、$a_{k+1}=1$ ならば S_k の連続する 2^k 個の要素2それぞれ 2^k を加えたものなので、$n=k+1$ のときも①は成立する。

[1] [2] より、数学的帰納法によって、全ての自然数 n について①は成立する。

また、$\{a_n,\ a_{n-1},\ \cdots\cdots\ a_2,\ a_1\}$ の組は 2^n 通りあり、Sn の要素も 2^n 個あるので、$x=[a_n,\ a_{n-1},\ \cdots\cdots\ a_2,\ a_1]$ と表すことのできる $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots\cdots\ a_2,\ a_1$ の組はただ一通りである。

（3） $-24=-32+16-8=1\times(-2)^5+1\times(-2)^4+1\times(-2)^3$ より

$-24=[111000]$

（4） $2^{11}=2048$ より

$2024=2048-24=2^{12}-2^{11}-32+6-8=1\times(-2)^{12}+1\times(-2)^{11}+(-2)^5+1\times(-2)^4+1\times(-2)^3$

$=[1100000111000]$

Ⅲ

$z=x+yi$ とおくと、z がOAの垂直二等分線上を動くとき、$x=\dfrac{a}{2}$

$\omega_1=X+Yi$ として、$\omega_1=z^2=x^2-y^2+2xyi$

$X=x^2-y^2$，$Y=2xy$

$x=\dfrac{a}{2}$ を代入して、

$X=\dfrac{a^2}{4}-y^2$ …… ①

$Y=ay \quad \therefore \quad y=\dfrac{Y}{a}$ …… ②

①に②を代入して

$X=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{Y^2}{a^2}$

ω_1 は複素数平面上 $x=\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{y^2}{a^2}$ 上を動く …… α

$\omega_2=X+Yi$ として、$\omega_2=-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{x+yi}=-\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$

$X=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，$Y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$x=\dfrac{a}{2}$ を代入して、

$X=\dfrac{-\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a^2}{4}+y^2}$ …… ③

$$Y=\frac{y}{\frac{a^2}{4}+y^2}$$

$$\therefore \quad \frac{Y}{X}=-\frac{y}{\frac{a}{2}} \quad y=-\frac{aY}{2X} \quad \cdots\cdots \text{④}$$

③に④を代入

$$X=\frac{-\frac{a}{2}}{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2Y^2}{4X^2}}$$

$$\frac{a^2}{4}X+\frac{a^2Y^2}{4X}=-\frac{a}{2}$$

$$a^2X^2+a^2Y^2=-2aX$$

$$X^2+\frac{2}{a}X+Y^2=0$$

$$\left(X+\frac{1}{a}\right)^2+Y^2=\frac{1}{a^2}$$

ω_2 は複素数平面上 $\left(x+\frac{1}{a}\right)^2+y^2=\frac{1}{a^2}$ 上を動く $\cdots\cdots$ β

αより、$y^2=\frac{a^4}{4}-a^2x$

βに代入して、$x^2+\frac{2}{a}x+\frac{a^4}{4}-a^2x=0$

$x^2+\left(\frac{2}{a}-a^2\right)x+\frac{a^4}{4}=0$ の判別式を D とおくと、

$$D=\frac{4}{a^2}-4a+a^4-a^4$$

$$=\frac{4}{a^2}(1-a^3)=\frac{4}{a^2}(1-a)(1+a+a^2)$$

よって、$0<a<1$ のとき $D>0$ 、$a=1$ のとき $D=0$ 、$a>1$ のとき $D<0$

x 軸対称なことを考えて、交点は $0<a<1$ のとき4点、$a=1$ のとき2点、$a>1$ のときなし

Ⅳ

（1）（2）

円 O_1 の中心を $(0,\ 1)$、円 O_2 の中心を $(0,\ 6)$ とすると、$l_1: y=0$, $l_2: x=0$

円 O_3 の中心を $(a,\ r)$ とすると、$(a>0)$

円 O_1 と接するので、

$$\sqrt{a^2+(r-1)^2}=r+1$$

$$a^2=4r \quad \cdots\cdots \text{①}$$

円 O_2 と接するので、

$$\sqrt{a^2+(r-6)^2}=r+4$$

$$a^2=20r-20 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

①②より、$r=\frac{5}{4}$ ：（1）　　$a=\sqrt{5}$ より、$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$ ：（2）

（3）（4）

l_3: $y=mx+n$ とおく $(m>0,\ n<0)$

$f(x,y)=mx-y+n$ とすると、 $f(0,6)=-6+n<0$

l_3 と点 $(0,\ 6)$ との距離が4より、

$$\frac{|f(0,6)|}{\sqrt{m^2+1}}=4$$

$$6-n=4\sqrt{m^2+1}$$

$$n=6-4\sqrt{m^2+1} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$f\left(\sqrt{5},\frac{5}{4}\right)$ は l_3 に対して $(0,\ 6)$ と同じ側にあるので、 $f\left(\sqrt{5},\frac{5}{4}\right)<0$

l_3 と点 $\left(\sqrt{5},\frac{5}{4}\right)$ との距離が $\frac{5}{4}$ より、

$$\frac{\left|f\left(\sqrt{5},\frac{5}{4}\right)\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{5}{4}$$

$$-\sqrt{5}m+\frac{5}{4}-n=\frac{5}{4}\sqrt{m^2+1}$$

①を代入して整理すると、

$$11\sqrt{m^2+1}=4\sqrt{5}m+19$$

両辺を2乗して整理すると、

$$41m^2-152\sqrt{5}m-240=0$$

$$(41m+12\sqrt{5})(m-4\sqrt{5})=0$$

$m>0$ より、 $m=4\sqrt{5}$

①より、 $n=-30$

$$l_3: y=4\sqrt{5}x-30$$

$y=0$ のとき、 $x=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

$x=0$ のとき、 $y=-30$

よって、 $\mathrm{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ：（3）、 $\mathrm{AD}=30$ ：（4）

～講評～

例年通り大問４題の出題であったが、大幅に難化した。

Ⅰ　（1）はとらなければいけない問題。(2）はあまり見かけない相関係数の問題のため、戸惑った受験生も多かっただろう。

Ⅱ　（1）(3)（4）は何とか解いてほしい。(2）は非常に書きにくい証明問題であった。

Ⅲ　複素数平面上の動点の問題。解き切るのは厳しいかもしれないが、この問題をどこまで切りくずせたかで差がついただろう。

Ⅳ　（1）(2）は手早く解けただろう。(3)（4）は色んな方針が考えられるが、どの方針でもかなり時間がかかる。飛ばすのが懸命だろう。

解ける問題と時間がかかる問題がはっきり分かれたセットであった。5 割取ることができれば十分だろう。