解答速報

医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX

兵庫医科大学　一般選抜

数学

$\boxed{1}$

(1)

$|\vec{a}|=3t,\ |\vec{b}|=2t\ (t>0)$ とおくと、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3t^2$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=7t^2$$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$ のとき、点Pが原点から最も近い点となるので、

$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ とおくと、

$$k=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}=\frac{-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{7t^2}=\frac{6}{7}$$

AP:PB＝6:1 となるので、

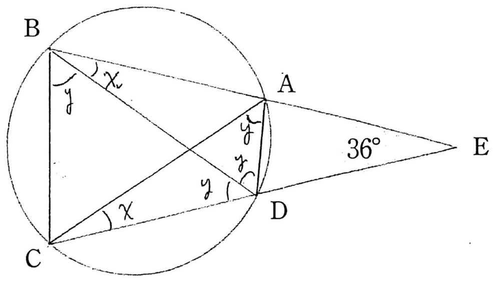
$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+6\vec{b}}{7}$$

(2)

余事象は5人とも違う誕生月なので、求める確率は

$$1-\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{12^5}=\frac{89}{144}$$

(3)



△EBCにおいて、

$$2x+2y+36^\circ=180^\circ\ \cdots\cdots\ ①$$

△ACDにおいて

$$x+3y=180^\circ\ \cdots\cdots\ ②$$

①、②より $x=18^\circ,\quad y=54^\circ$

$$\angle ACD=18^\circ$$

(4)

$$w=(1+2i)(z+2)$$

$$z+2=\frac{w}{1+2i}$$

$$z=\frac{w}{1+2i}-2$$

$|z|=1$ より、

$$\left|\frac{w}{1+2i}-2\right|=1$$

$$\frac{|w-(2+4i)|}{|1+2i|}=1$$

$$|w-(2+4i)|=\sqrt{5}$$

よって w は点 $(2+4i)$ を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円上を動く。

$|w+1|$ は点 (-1) からの距離を表している。点 $(2+4i)$ と点 (-1) との距離は $\sqrt{(2+1)^2+4^2}=5$

これに半径を足して、$|w+1|$ の最大値は $5+\sqrt{5}$

(5)

$$f(x)=2\cdot 2\sin x\cos x\sin x\ +3\sin^2 x+4\frac{1+\cos x}{2}$$

$$=4\sin^2 x\cos x+3\sin^2 x+2+2\cos x$$

$$=4(1-\cos^2 x)\cos x+3(1-\cos^2 x)+2+2\cos x$$

$$=-4\cos^3 x-3\cos^2 x+6\cos x+5$$

$\cos x=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$として、 $g(t)=-4t^3-3t^2+6t+5$ とおくと

$$g'(t)=-12t^2-6t+6$$

$$=-6(t+1)(2t+1)$$

$g'(t)=0$ とすると、 $t=-1,\ \frac{1}{2}$ となるので増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{4}$	$\searrow$	4

よって $t=\frac{1}{2}$ すなわち $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$のとき最大値 $\frac{27}{4}$ 、 $t=-1$ すなわち $x=\pi$ のとき最小値 0

$\boxed{2}$

(1)

$y=0$ 上の格子点は 5 個

$y=1$ 上の格子点は 4 個

$y=2$ 上の格子点は 1 個

$\therefore\quad 5+4+1=10$ 個

(2)

$y=k$ （ k は$0\leqq k\leqq n$ を満たす整数）上の格子点は n^2-k^2+1 個なので、

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2-k^2+1)=n^2(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n+1$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)\text{ 個}$$

(3)

(a) $C(n,0)$ とおく。

① △OACの周及び内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1)=3\times\frac{1}{2}n(n+1)+n+1=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\text{ 個}$$

② △ABCの周及び内部にある格子点の個数を求める。

$$\text{AB:}\quad \mathrm{y}=-\frac{1}{3}(\mathrm{x}-10\mathrm{n})$$

$y=l$ （ l は$0\leqq l\leqq 3n$ を満たす整数）とABとの交点の x 座標は $l=-\frac{1}{3}(x-10n)$ より

$$x=10n-3l$$

$$\therefore\quad \sum_{l=0}^{3n}(10n-3l-n+1)$$

$$=\sum_{l=0}^{3n}(9n-3l+1)$$

$$=9n(3n+1)-3\times\frac{1}{2}\times 3n(3n+1)+(3n+1)$$

③　AC 上の格子点の個数は $3n+1$ 個

①+②−③より

$$\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\right)+\left(\frac{27}{2}n^2+\frac{15}{2}n+1\right)-(3n+1)$$

$$=15n^2+7n+1 \text{ 個}$$

(b)　$OA=\sqrt{10}\,n,\ OB=10n,\ AB=3\sqrt{10}\,n$

$\angle AOB$ の二等分線と AB との交点を D と置くと、

$$\overrightarrow{OD}=\frac{10\overrightarrow{OA}+\sqrt{10}\,\overrightarrow{OB}}{10+\sqrt{10}}$$

$$AD=\frac{\sqrt{10}}{10+\sqrt{10}}\cdot 3\sqrt{10}\,n=\frac{30}{10+\sqrt{10}}n$$

$$\therefore\quad OI:ID=OA:AD$$

$$=\sqrt{10}:\frac{30}{10+\sqrt{10}}$$

$$=(1+\sqrt{10}):3$$

よって、$\overrightarrow{OI}=\dfrac{1+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}\overrightarrow{OD}=\dfrac{\sqrt{10}\,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{4+\sqrt{10}}=((5-\sqrt{10})n,\ (2\sqrt{10}-5)n)$

$\angle OAB=90^\circ$ なので、直角三角形の外心は斜辺OB の中点

$$O_1(5n,\ 0)$$

3

(1)

$f(x)=x\log t-t\log x$ 、真数条件より $x>0$ 、$f'(x)=\log t-\dfrac{t}{x}$

$f'(x)=0$ とすると、$x=\dfrac{t}{\log t}$

増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{t}{\log t}$	$\cdots$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

よって $0<x\leqq\dfrac{t}{\log t}$ で減少、$\dfrac{t}{\log t}\leqq x$ で増加。

(2)

(1) より最小値は $f\left(\dfrac{t}{\log t}\right)$ となるので、

$$f\left(\frac{t}{\log t}\right)\leqq f(t)=0$$

(3)

(2) より、$t=e$ のとき、$f(x)=x\log e-e\log x$ の最小値は 0。

このとき、

$$f(\sqrt{5})=\sqrt{5}\log e-e\log\sqrt{5}>0$$

$$\sqrt{5}\log e>e\log\sqrt{5}$$

$$\log e^{\sqrt{5}}>\log\sqrt{5}^{\,e}$$

底 e は 1 より大きいので、

$$e^{\sqrt{5}}>\sqrt{5}^{\,e}$$

(4)

$$F(t)=\log t\int_1^t x\,dx-t\int_1^t \log x\,dx$$

$$F'(t)=\frac{1}{t}\int_1^t x\,dx+t\log t-\int_i^t \log x\,dx-t\log t$$

$$=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^t-\left[x\log x-x\right]_1^t$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{1}{2t}-t\log t+t-1$$

$$=\frac{3}{2}t-\frac{1}{2t}-t\log t-1$$

$$F'(e)=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2e}-2$$

～講評～

大問１は例年とは異なり、本年度はどれもが解きにくい問題であった。

大問２は格子点と内心・外心に関する問題で、(1)（2）は典型問題だが、(3)の（a)（b）内心は計算量が多い問題であった。

大問３は数Ⅲの微分積分の問題で、(2)は f(t)=0 に気づかなければ時間がかかり、(3)（4）も解きにくい問題であった。

例年通りの傾向ではあるが、計算量がかなり増加し、うまく工夫しても時間内に解き切るのは厳しいセットであった。

大問１の配点が大きいことを考えると、大問１で３問程度、大問２・３の前半が解けていればよい方だろう。そのためボーダーは５割程度だと思われる。