愛知医科解答速報

愛知医科大学解答速報は、メルリックス学院生の受験生からの聞き取りを行い、問題を復元して作成いたしました。
実際の問題と相違していることも十分に考えられますので、ご注意ください。

$\boxed{1}$

(1)
① 2024の正の約数の個数を求めよ。
② 2024の正の約数の総和を求めよ。

(2)
A, Bいずれかが$\dfrac{1}{2}$の確率で勝利するゲームがある。
このゲームを繰り返し行い、A, Bいずれかが4回勝利するとゲーム終了となる。
（ i ）4回目に終了する確率を求めよ。
（ii）6回目に終了する確率を求めよ。

(3)
$|\overrightarrow{OA}|=4, |\overrightarrow{OB}|=5, |\overrightarrow{OC}|=6,\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$が成り立つとき、以下の問いに答えよ。
（ i ）内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$の値を求めよ。
（ii）三角形ABCの面積を求めよ。

(4)
関数$f(x)=\sqrt{x^2+a}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$について、$f(x)$が極大,極小をもつとき、
正の定数aの値の範囲を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$

(1)
① $2024=2^3\cdot11\cdot23$であるので、$(3+1)(1+1)(1+1)=16$個
② $(2^0+2^1+2^2+2^3)(11^0+11^1)(23^0+23^1)=4320$

(2)
(i)$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot2=\dfrac{1}{8}$

(ii)${}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot2=\dfrac{5}{16}$

(3)
(i) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$より、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2}{2}=-\frac{5}{2}$$

（ii）

$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$より、ABの中点をMとすると、$\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OM}$

よって、$\triangle ABC=\triangle OAB\times 3$

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

よって、$\triangle ABC=\dfrac{45\sqrt{7}}{4}$

(4)

$$f(x)=\sqrt{x^2+a}+\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{x^2+a+1}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x^2+a}-(x^2+a+1)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x^2+a}=\frac{x(x^2+a-1)}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}$$

$a\geqq 1$のとき、$x=0$でのみ極値をとるので、極大極小を両方取ることはない。

$0<a<1$のとき、$x=0,\ \pm\sqrt{1-a}$で極値を取るので、極大極小の両方が存在する。

よって、$0<a<1$

$\boxed{2}$

直線$l_1: ax+by+c=0$は、楕円C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$に第一象限で接する。

直線l_2はl_1と垂直に交わり、楕円Cに第二象限で接する。

l_1, l_2の一部を辺とする、楕円Cに外接する長方形ABCDを考える。

ただし、l_1, l_2の交点をAとし、反時計回りにABCDとする。

(1) l_1と原点との距離d_1および、l_2と原点との距離d_2を求めよ。

(2)長方形ABCDの対角線の長さをLを求めよ。

(3)長方形ABCDの最大値と、そのときの頂点の座標を求めよ。

解答

(1) l_1とCの接点を(s,t)とする。

l_1の方程式は、$\dfrac{sx}{4}+ty=1 \Longrightarrow sx+4ty-4=0$である。これが$ax+by+c=0$と一致する。

よって、$\dfrac{s}{a}=\dfrac{4t}{b}=\dfrac{-4}{c}$が成り立つ。…①

また、$\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$が成り立つ…②

①より、$s=-\dfrac{4a}{c}, t=-\dfrac{b}{c}$となるので、②に代入すると、

$\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{4a}{c}\right)^2+\left(-\dfrac{b}{c}\right)^2=1$　よって、$c^2=4a^2+b^2$　　$|c|=\sqrt{4a^2+b^2}$

$d_1=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$より、$d_1=\sqrt{\dfrac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}}$

l_2はl_1と垂直なので、$bx-ay+c'=0$とすることができる。

l_1と同様に、$|c'|=\sqrt{4b^2+(-a)^2}=\sqrt{a^2+4b^2}$となるので、

$d_2=\sqrt{\dfrac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}}$

(2)

対角線の長さL$=2\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2}=2\sqrt{5}$

(3)

長方形の面積S$=2d_1\times 2d_2=4\sqrt{\dfrac{(4a^2+b^2)(a^2+4b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=4\sqrt{4+\dfrac{9a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}$

$=4\sqrt{4+\dfrac{9}{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2}}$

本問では、$a>0, b>0, c<0$としても一般性を失わない。

相加相乗平均により、

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$

よって、面積の最大値は、$4\sqrt{4+\dfrac{9}{2^2}}=10$

相加相乗平均の等号成立条件は、$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$なので、面積が最大のときには$a=b$が成り立つ。

$|c|=\sqrt{4a^2+b^2}, c<0$より、$c=-\sqrt{5}a$

よって、$l_1: ax+ay-\sqrt{5}a=0 \iff x+y-\sqrt{5}=0$

$l_2: ax-ay+\sqrt{5}a=0 \iff x-y+\sqrt{5}=0$

このようにして、それぞれの辺の方程式が求まるので、

A$(0, \sqrt{5})$ B$(-\sqrt{5}, 0)$ C$(0, -\sqrt{5})$ D$(\sqrt{5}, 0)$

$\boxed{3}$

$-\sqrt{k} \leqq x \leqq \sqrt{k}$ を満たす整数xの個数をa_k, $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$とする。

(1)　S_4を求めよ。

(2) $2\sqrt{k}-1 < a_k \leqq 2\sqrt{k}+1$を示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$を求めよ。

解答

(1) $a_1=3$, $a_2=3$, $a_3=3$, $a_4=5$より、$S_4=3+3+3+5=14$

(2) $0<x<\sqrt{k}$を満たす整数xは、$\sqrt{k}$を超えない最大の整数を$[\sqrt{k}]$とするとき、

$[\sqrt{k}]$個存在する。$-\sqrt{k}<x<0$についても同様に$[\sqrt{k}]$個存在する。

これに$x=0$を加えると、$a_k=2[k]+1$となる。

$\sqrt{k}-1<[k] \leqq \sqrt{k}$が成り立つので、$2(\sqrt{k}-1)+1<2[k]+1 \leqq 2\sqrt{k}+1$

$2\sqrt{k}-1<a_k \leqq 2\sqrt{k}+1$が成り立つ。

(3)

(2)より、$2\sqrt{k}-1<a_k \leqq 2\sqrt{k}+1$なので、

$$\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}-1) < \sum_{k=1}^{n} a_k \leqq \sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}+1)$$

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}-1) < \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} \leqq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}+1)$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}-1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{k} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}1\right) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot n$$

$$=2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - 0 = 2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

同様に、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}+1) = \frac{4}{3}$

はさみうちの原理より、$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}$

【講評】
愛知医科大学数学のポイントは、何といっても$\boxed{1}$の答えだけを書く形式の問題でどれだけ取り切れるかが重要になる。今年度も易し目の問題が並んでいるので、ミスを少なくして十分に得点していきたい。

$\boxed{2}$は(1)をどのように捌き切るかがポイントであっただろう。本解では接線の方程式を立てて、係数を比較することとしたが他にも解法はある。この計算を乗り越えられたら、フルマークも見えてくる。

$\boxed{3}$は（2）の証明が何を書けばよいのか、今一つ分からないところではあるが、それを飛ばしても（3）は区分求積法とはさみうちの原理の典型例であるので、難しすぎる問題ではない。

しかし、全般的によどみなく受験生の地力を試し続ける問題であった。

合格ラインとしては、150点満点の80～90点と考えられる。