解答速報

藤田医科大学 ふじた未来入試 数学

$\boxed{1}$ (1) アイ：52　ウ：2　(2) エオ：87　カキ：69 (3) クケ：$\dfrac{1}{4}$　コサ：$2\sqrt{3}$

(4) シスセ：$(72, 9)$　(5) ソタ：15　チツ：60 (6) テト：84 (7) ナニ：42

(8) ヌネ：35 (9) ノハ：24 (10) ヒフヘ：$\dfrac{-1}{2}$ (11) ホマ：27

$\boxed{2}$ (1) 直径に対する円周の長さの比率

(2) 定義：円周上でその円の半径と同じ長さの弧を切り取る角

半径 r の扇形を考えると中心角 1ラジアンのときの弧の長さは r

中心角60°のとき 弧の長さ＞弦の長さであるので,中心角60°の弧の長さの方が長い。

中心角が大きければ大きいほど弧の長さは大きくなるので 1ラジアンは60°より小さい。

(3) 半径 r , 中心角θの弧の長さは $r\theta$

半径 r の円の円周は $2\pi r$, 面積は πr^2 なので,

扇形の面積は $\pi r^2 \times \dfrac{r\theta}{2\pi r} = \dfrac{1}{2}r^2\theta$ となる。

$\boxed{3}$ (1) $R(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \, , \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)$

(2) 最大値：$\sqrt{3}+1$ 最小値：2

《解説》

$\boxed{1}$ (1) $x^2+\dfrac{16}{x^2}=t$ とおく。各項が正であるので,相加平均･相乗平均の関係が使える。

$t=x^2+\dfrac{16}{x^2}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{16}{x^2}}=8$ 等号成立条件は $x^2=4$, つまり $x>0$ より $x=2$

$y=t^2-2t+4=(t-1)^2+3\quad(t\geqq 8)$

よって, $t=8$ のとき, つまり $\underline{x=2}$ のとき$\underline{\text{最小値 } 52}$

(2) $\dfrac{a+b+c}{3}=5$

$\sqrt{\dfrac{(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2}{3}}=2$

より $a+b+c=15$, $(a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2=12$

$\Leftrightarrow a+b+c=15$, $a^2+b^2+c^2-10(a+b+c)+75=12$

$\Leftrightarrow a+b+c=15$, $\underline{a^2+b^2+c^2=87}$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=225$ より

$\underline{ab+bc+ca=69}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ となるので, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくと, $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\fallingdotseq 0$より$s\fallingdotseq 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=16s^2-4s=4s(4s-1)=0$

$s\fallingdotseq 0$ より $\underline{s=\dfrac{1}{4}}$

三角形ABCの面積は $\underline{\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}=2\sqrt{3}}$

(4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8}$ より $xy=8x+8y$

よって, $xy-8x-8y=(x-8)(y-8)-64=0$

$(x-8\,,\,y-8)=(64\,,\,1)$ のときが x が最大。よって, $\underline{(72\,,\,9)}$

(5) x^2y^4 の係数は x , x , y , y , y , y の並べ替えに等しい。 $\underline{\dfrac{6!}{2!4!}=15}$

x^5y^3 の係数は xy , xy , x , x , x , y の並べ替えに等しい。 $\underline{\dfrac{6!}{2!3!}=60}$

(6) $x+y+z+w=9$ の$x>0$, $y>0$, $z>0$, $w\geqq 0$の全て整数となる組合せに等しい。

つまり, $x+y+z+w=10$ の x , y , z , w が全て自然数となる組合せに等しい。

よって, 重複組み合わせで考えて, $\underline{{}_9C_3=84}$

(7) $a=7\cos\theta_1$, $b=7\sin\theta_1$, $x=6\cos\theta_2$, $y=6\sin\theta_2$ とおける。

$ax+by=42(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)=42\cos(\theta_1-\theta_2)$

よって, $\theta_1=\theta_2$ のとき$\underline{\text{最大値}42}$

(8) (与式) $=-c^2(a+b)+a^3+b^3-a^2b-ab^2$

$=-c^2(a+b)+(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$

$=(a+b)(a^2-2ab+b^2-c^2)=(a+b)(a-b+c)(a-b-c)=36$

より $a-b+c$, $a-b-c$ の偶奇は一致すること, a , b , c が整数であることから

$(a\,,\,b\,,\,c)=(7\,,5\,,1)$ よって, $\underline{abc=35}$

(9) (i) $x^2-1\geqq 0$ つまり $-1\geqq x\,,\,1\leqq x$ のとき

(あ) $2y+5\geqq 0$ つまり $y\geqq -\dfrac{5}{2}$ のとき

$3x^2-3+2y+5\leqq 9$

$\Leftrightarrow y\leqq -\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{7}{2}$

(い) $2y+5<0$ つまり $y<-\dfrac{5}{2}$ のとき

$3x^2-3-2y-5\leqq 9$

$\Leftrightarrow y\geqq \dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{17}{2}$

(ii) $x^2-1<0$ つまり $-1<x<1$ のとき

(う) $2y+5\geqq 0$ つまり $y\geqq -\dfrac{5}{2}$ のとき

$-3x^2+3+2y+5\leqq 9$

$\Leftrightarrow y\leqq \dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

(え) $2y+5<0$ つまり $y<-\dfrac{5}{2}$ のとき

$-3x^2+3-2y-5\leqq 9$

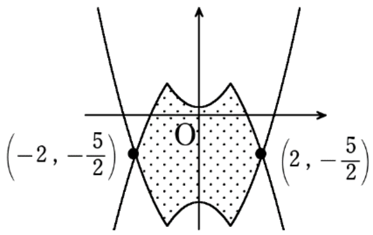
$\Leftrightarrow y\geqq -\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{11}{2}$

よって, 右図塗りつぶし部分。 y 軸対称であるので,

$$2\int_1^2\left\{\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{17}{2}\right)\right\}dx+$$

$$2\int_0^1\left\{\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}\right)\right\}dx$$

$\underline{=24}$



(10) (与式) $=\cos\dfrac{2}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi-\dfrac{1}{2}+\cos\dfrac{8}{9}\pi$

$=2\cos\dfrac{5}{9}\pi\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{4}{9}\pi-\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{5}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi-\dfrac{1}{2}$

$=2\cos\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{18}-\dfrac{1}{2}\ \underline{=-\dfrac{1}{2}}$

(11) 接点を $(t\,,\,t^3)$ とおくと, 接線の方程式は $y=3t^2(x-t)+t^3=3t^2x-2t^3$

$(1\,,81)$ を通るので $81=3t^2-2t^3$

$2t^3-3t^2+81=(t+3)(2t^2-9t+27)=0$

よって, $t=-3$　以上より傾き $\underline{27}$

$\boxed{2}$ (1) 直径に対する円周の長さの比率

(2) 定義：円周上でその円の半径と同じ長さの弧を切り取る角

半径 r の扇形を考えると中心角 1ラジアンのときの弧の長さは r

中心角60°のとき 弧の長さ＞弦の長さであるので,中心角60°の弧の長さの方が長い。

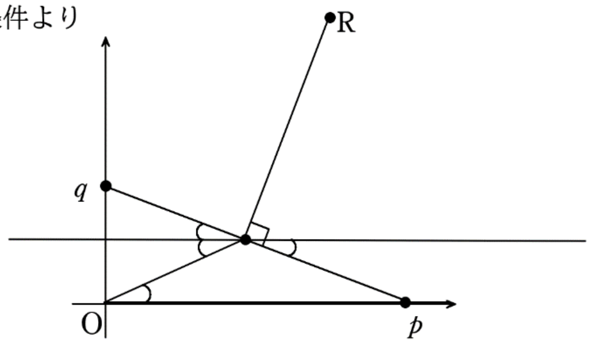
中心角が大きければ大きいほど弧の長さは大きくなるので 1ラジアンは60°より小さい。

(3) 半径 r , 中心角 θ の弧の長さは $r\theta$

半径 r の円の円周は $2\pi r$, 面積は πr^2 なので,

扇形の面積は $\pi r^2\times\dfrac{r\theta}{2\pi r}=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ となる。

$\boxed{3}$ (1) 条件より



印を付けた角度は全てθとなる。よって, $OM=MQ=PM=1$

PQ の長さは 2 かつ三角形 PQR は正三角形であるので, $MR=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\left(\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right), \sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=(\sqrt{3}\sin\theta\ , \sqrt{3}\cos\theta)$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(\cos\theta\ , \sin\theta)$ より

$\underline{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\ , \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)}$

(2) $OR=\sqrt{(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2+(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2}=\sqrt{4+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{3}\sin 2\theta}$

仮定より $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq 2\theta\leqq\pi$　つまり, $0\leqq\sin 2\theta\leqq 1$ であるので,

OR の最大値は $\sqrt{4+2\sqrt{3}}\ \underline{=\sqrt{3}+1}$

OR の最小値は $\sqrt{4}\ \underline{=2}$