解答速報

名古屋市立大学医学部（一般前期）

数学

医歯専門予備校 メルリックス学院 MELURIX

$\boxed{1}$

(1)

$n \geqq 2$のとき

$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) = 2 \cdot 3^{n-1}$

$S_1 = a_1 = 2$より$n = 1$のときも満たす。

よって, $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(2)

$b_n = 3n \cdot 2 \cdot 3^{n-1} = 2n \cdot 3^n$

$b_{15} = 10 \cdot 3^{16}$

$\log_{10} b_{15} = 1 + 16 \times \log_{10} 3 = 8.6336$　よって, 9桁

(3)

$T_n = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot n \cdot 3^n$

$3T_n = \qquad 2 \cdot 3^2 \quad + 2 \cdot 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot (n-1) \cdot 3^n + 2n \cdot 3^{n+1}$

$-2T_n = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2 \cdot 3^n - 2n \cdot 3^{n+1}$

$\qquad = 6 \dfrac{3^n - 1}{3 - 1} - 2n \cdot 3^{n+1} = 3^{n+1} - 3 - 2n \cdot 3^{n+1}$

$T_n = \dfrac{(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3}{2}$

$\boxed{2}$

(1)　誰が勝つかを選ぶのがn通り

手の出し方は3通り

全事象は3^n通りなので, $\dfrac{3n}{3^n}=\dfrac{n}{3^{n-1}}$

(2)　勝敗がつく場合, つまりn人が2種類の手を出すときなので,

$3(2^n-2)$通り

$$\frac{3(2^n-2)}{3^n}=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

よってあいこになる確率は$\dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$

(3)　２回目で勝者が一人に決まるパターンは

	1回目	2回目
(i)	あいこ	1人勝ち
(ii)	4人勝ち	1人勝ち
(iii)	3人勝ち	1人勝ち
(iv)	2人勝ち	1人勝ち

の4通りが考えられる。

(i)　(1)(2)より　$\dfrac{3^4-2^5+2}{3^4}\cdot\dfrac{5}{3^4}=\dfrac{85}{3^7}$

(ii)　4人が同じ手を出し, 1人が負ける手を出すので $\dfrac{3\cdot{}_5C_1}{3^5}$

4人から1人勝ちになるのは(1)より$\dfrac{4}{3^3}$　よって, $\dfrac{3\cdot{}_5C_1}{3^5}\times\dfrac{4}{3^3}=\dfrac{20}{3^7}$

(iii) 3人が同じ手を出し, 2人が負ける手を出すので $\dfrac{3\cdot{}_5C_2}{3^5}$

3人から1人勝ちになるのは(1)より$\dfrac{3}{3^2}$　よって, $\dfrac{3\cdot{}_5C_2}{3^5}\times\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{10}{3^5}$

(iv)　2人が同じ手を出し, 3人が負ける手を出すので $\dfrac{3\cdot{}_5C_3}{3^5}$

2人から1人勝ちになるのは(1)より$\dfrac{2}{3}$　よって, $\dfrac{3\cdot{}_5C_3}{3^5}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{20}{3^5}$

以上より

$$\frac{85}{3^7}+\frac{20}{3^7}+\frac{10}{3^5}+\frac{20}{3^5}=\frac{125}{729}$$

$\boxed{3}$

(1)　A , B ,Cを通る平面を$px+qy+rz+s=0$とおくと

$$\begin{cases} -p+q+3r+s=0 \\ 2p+q+s=0 \\ 3q+r+s=0 \end{cases}$$

これを解くと, $p=r$, $r=2q$, $s=-5q$

よって,$p:q:r:s=2:1:2:(-5)$より

$2x+y+2z-5=0$

よって法線ベクトル$\vec{n}=(2\ ,1\ ,2)$と書け, $a=c=2$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=h\vec{n}=(2h\ ,\ h\ ,2h)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(5+2h\ ,3+h\ ,5+2h)$

Hは平面α上であるので$10+4h+3+h+10+4h-5=0$

$h=-2$

$H(1\ ,1\ ,1)$

(3)　$D(5\ ,1,\ -3)$は平面αの方程式を満たす。

Qと平面 αの距離は$\dfrac{|4t+10+t+3+4t-8-5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3t$

Rと平面αの距離は$\dfrac{|4u+6+u-1+4u-5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=3u$

$\triangle ABC$の面積は$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{9}{2}$

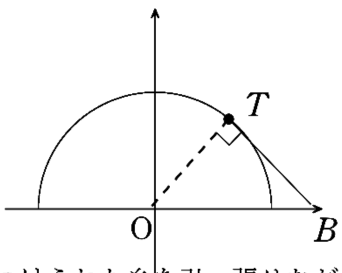
$\triangle ACD$の面積は$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}^2||\overrightarrow{\mathrm{AD}}^2|-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})}=9$

より四面体$QABC$の体積は$\dfrac{9}{2}\cdot t\cdot\dfrac{1}{3}$

　　四面体$RACD$の体積は$9\cdot u\cdot\dfrac{1}{3}$

よって体積比は$t:2u$

$\boxed{4}$



巻きつけられた糸を引っ張りながら動かす場合, 糸は接線方向に引っ張られている。この接点をQとおく。

点PがBにあるときの接点をTとおくと, $\angle OTB=90°$より三平方の定理よりTB

$=\sqrt{\sqrt{2}^2-1}=1$

$\angle QOB=\theta$とおくと,

$|QP|=1+\theta-\dfrac{\pi}{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(\left(1+\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\theta, \left(1+\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta\right), \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\cos\theta\ , \sin\theta)$

よって,$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\cos\theta+\left(1+\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\theta\ , \sin\theta-\left(1+\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\theta\right)$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta+\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)\times\frac{\pi}{2}$ を求めればよい。

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}+1\right)\cos\theta=\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}+1\right)\cos\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos\theta+\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}+1\right)\sin\theta=\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}+1\right)\sin\theta$

より

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta+\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)\times\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left(\theta-\frac{\pi}{4}+1\right)d\theta+\frac{3}{8}\pi^2+\frac{1}{2}\pi$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}\theta^2-\frac{\pi}{4}\theta+\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}+\frac{3}{8}\pi^2+\frac{1}{2}\pi$

$=\dfrac{21}{32}\pi^2+\dfrac{5}{4}\pi$

講評

2020～2022年度は合格者平均点が7割を越えており、取り組みやすい問題が多かったが、2023年度も同様に高得点勝負となる問題構成であった。

大問１は数列の問題であったが、受験生には馴染みのある平易な問題であった。しかし、油断すると計算間違いをしてしまったり、（1）で$n=1$に関して言及することを忘れてしまったりするものである。
時間には余裕があるので、検算を怠らないようにしたい。

大問2はじゃんけんの確率の問題であった。これも名古屋市立大学の受験生にとっては平易なものであっただろう。計算ミスさえなければ、取り切れていたはずである。

大問3は空間ベクトルの問題であった。解答では平面の方程式･点と平面の距離を使ったが、もちろん使わなくても大丈夫である。
点Dが平面ABC上にあることに気が付きにくかったかもしれないが、時間に余裕があるので結局は気が付けた受験生が多かっただろう。

大問4は媒介変数を使った微積分に関する問題であった。Pの座標を適切に媒介変数表示できれば、曲線の長さを求める積分計算は割と簡単なものであった。ただ、この問題が最も得点差が付いた問題ではなかったかと思われる。

今年度も難易度は高くなく、時間的にも余裕のある問題構成であった。ただ、ミスをすると一気に得点を落としてしまう可能性があるので、慎重さは失わないでおきたい。
合格目標点は75%程度であると考えられる。