解答速報

大阪医科薬科大学（一般前期）

数学

〔1〕(1) $y=x^2 \quad y'=2x$ より点A(a,a^2)における法線の方程式は

$-2a(y-a^2)=x-a$ 整理すると $x+2ay-a-2a^3=0$

(2) (1)と同様にして点B(b,b^2)における法線の方程式は $x+2by-b-2b^3=0$

点Pは2直線の交点なので$\begin{cases} x+2ay-a-2a^3=0 \\ x+2by-b-2b^3=0 \end{cases}$を解くと

点P$\left(-2ab(a+b),\ a^2+ab+b^2+\dfrac{1}{2}\right)$となる

$\displaystyle\lim_{b\to a}-2ab(a+b)=-4a^3 \quad \lim_{b\to a}\left(a^2+ab+b^2+\frac{1}{2}\right)=3a^2+\frac{1}{2}$

点Q$\left(-4a^3, 3a^2+\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $x=-4a^3 \quad y=3a^2+\dfrac{1}{2}$とおくと、曲線の長さ$L$は

$\displaystyle L=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2}\,da=\int_{-1}^{1}\sqrt{144a^4+36a^2}\,da=2\int_0^1\sqrt{144a^4+36a^2}\,da$

$\displaystyle =\int_0^1 12a\sqrt{4a^2+1}\,da$ $\qquad \sqrt{4a^2+1}=t$と置換すると

$\displaystyle =\int_1^{\sqrt{5}}3t^2dt=\Big[t^3\Big]_1^{\sqrt{5}}=5\sqrt{5}-1$

〔2〕(1) $f(x)=e^x\sin(e^x)$

$e^x>0$よりx軸との共有点のx座標は$\sin(e^x)=0$

$y=e^x$は増加関数より$e^x=k\pi$ ($e^x>0$よりkは自然数)

$x=\log k\pi$ よって, $a_n=\log n\pi$

$\displaystyle S_n=\int_{\log n\pi}^{\log(n+1)\pi}|f(x)dx|$

$\displaystyle \int f(x)dx=-\cos(e^x)+C$ (Cは積分定数)

$f(x)$は$\log n\pi<x<\log(n+1)\pi$で正負は変化しないことより

$S_n=[|-\cos(e^x)|]_{\log n\pi}^{\log(n+1)\pi}=2$

(2)　$f'(x)=e^x\sin(e^x)+e^{2x}\cos(e^x)$

$f'(\log n\pi)=(n\pi)^2(-1)^n$

よって, A_nにおける$y=f(x)$の接線の方程式は

$y=n^2\pi^2(-1)^n(x-\log n\pi)$

この接線の方程式のy切片は$(0,\ -n^2\pi^2(-1)^n\log n\pi)$

よって, $T_n=\dfrac{1}{2}n^2\pi^2\log(n\pi)$　$T_{n+1}=\dfrac{1}{2}(n+1)^2\pi^2\log(n+1)\pi$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{\frac{1}{2}(n+1)^2\pi^2\log(n+1)\pi}{\frac{1}{2}n^2\pi^2\log n\pi}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{\log(n+1)\pi}{\log n\pi}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{\log n\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n\pi}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n\pi}\right)$$

よって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_{n+1}}{T_n}=1$

(3)　$e^x=|e^x\sin(e^x)|$より $\sin(e^x)=\pm1$　よって $e^x=\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\pi$

$x=\log\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\pi$　よって　$B_n\left(\log\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$

$U_n=\dfrac{1}{2}(\log(n+1)\pi-\log n\pi)\cdot\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi=\left(\dfrac{1}{2}n\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right)\cdot\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\left(\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)}=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{\pi}{4n}\right)}=\frac{\pi}{2}$$

〔3〕(1) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$とおく。 $f(\alpha)=0$より

$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots a_1\alpha+a_0=0$　仮定よりa_kは実数$(k=0,1,2\cdots,n)$なので

$\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0}=\ a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots a_1\overline{\alpha}+a_0=0$

よって, $f(\overline{\alpha})=0$となり, $x=\overline{\alpha}$も解

(2) $A_0=1$とおき$A_k=\left(\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+i\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)^k$とおくことができる。

$A_1=z$とおくと

$L=|z-1|\cdot|z^2-1|\cdot|z^3-1|\cdot\cdots\cdot|z^n-1|$

$L^2=(z-1)(z^2-1)(z^3-1)\cdot\cdots\cdot(z^n-1)\cdot(\overline{z}-1)(\overline{z^2}-1)\cdot\cdots\cdot(\overline{z^n}-1)$

$\overline{z^k}=z^{2n+1-k}$であることから

$L^2=(z-1)(z^2-1)\cdot\cdots\cdot(z^{2n}-1)$

いま, $1,z,z^2,\cdots z^{2n}$は$x^{2n+1}-1=0$の異なる$2n+1$個の解である。

$x^{2n+1}-1=(x-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1)=0$より

$x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1=0$の解が$z,z^2,\cdots z^{2n}$であるので,

$g(x)=x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x+1=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)\cdots(x-z^{2n})$

$g(1)=2n+1=(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^{2n})=L^2$

よって, $L=\sqrt{2n+1}$

〔4〕　点PがA, B, Cにいるときに次にA, B, Cに移動する確率はそれぞれ$\dfrac{1}{3}$であるので，

k番目の文字列が○である確率は$\dfrac{1}{3}$, ×である確率は$\dfrac{2}{3}$である。

n回目の操作後の状態として，これまで×が連続しておらず，○で終了している確率をX_n

×で終了しているが，連続して×が並んでいることがない確率をY_n,

とおくと，$X_{n+1}=\dfrac{1}{3}X_n+\dfrac{1}{3}Y_n$, $Y_{n+1}=\dfrac{2}{3}X_n$　よって，$X_{n+2}=\dfrac{1}{3}X_{n+1}+\dfrac{2}{9}X_n$　…①

①を変形して、$X_{n+2}+\dfrac{1}{3}X_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(X_{n+1}+\dfrac{1}{3}X_n\right)$,　$X_{n+2}-\dfrac{2}{3}X_{n+1}=-\dfrac{1}{3}\left(X_{n+1}-\dfrac{2}{3}X_n\right)$

よって，$X_1=X_2=\dfrac{1}{3}$より$X_{n+1}+\dfrac{1}{3}X_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$…②　$X_{n+1}-\dfrac{2}{3}X_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$　…③

②, ③より，$X_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$Y_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$　$(n\geqq 2)$

よって，$n\geqq 2$のとき　　$p_n=X_n+Y_n=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

〔5〕

$n!$を9進法に直したときに末尾に並ぶ0がk個のとき，$n!=a\cdot 9^k$（aは9の倍数でない整数）

よって，3の因子がいくつあるかに注目すればよい。

(1)

$\left[\dfrac{8}{3}\right]=2$　よって$f(8)=1$

$f(6789)=\left[\dfrac{6789}{3}\right]+\left[\dfrac{6789}{3^2}\right]+\left[\dfrac{6789}{3^3}\right]+\left[\dfrac{6789}{3^4}\right]+\cdots+\left[\dfrac{6789}{3^8}\right]=3391$

よって$f(6789)=1695$

(2)

$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{3^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{3^n}\right]\leqq\frac{n}{3}+\frac{n}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}=\frac{n}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{n}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}<\frac{n}{2}$$

$n<3^n$より$f(n)=\left[\dfrac{\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{3^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{3^n}\right]}{2}\right]<\dfrac{n}{4}$

よって$4k<n$となり，題意は示された。

(3)

(2)より$n=4000$付近であることが推測できる。

$\left[\dfrac{4000}{3}\right]+\left[\dfrac{4000}{3^2}\right]+\left[\dfrac{4000}{3^3}\right]+\left[\dfrac{4000}{3^4}\right]+\left[\dfrac{4000}{3^5}\right]+\left[\dfrac{4000}{3^6}\right]+\left[\dfrac{4000}{3^7}\right]=1996$

であり,4000以上の3の倍数を順に考えると，

$4002=3\times 1334$, $4005=9\times 445$, $4008=3\times 1336$ より

$f(4008)=2000$となりる。よって，$n=4008$

講評

１．放物線の法線の交点、曲線の長さ

⑴　法線の方程式を求める問題。点Aが原点の場合に注意が必要。

⑵　2つの法線の交点を求める問題。極限値は易しい。

⑶　基本的な置換積分で求めることができる曲線の長さ。

２．指数関数と三角関数

⑴　グラフの大体のようすがイメージできれば解きやすい問題。

⑵　⑴で交点の座標を求めることができていないと、この問題以降解くことができない。
　⑴ができていれば面積を求めることは難しくないが、極限値を求めるには工夫が必要。

⑶　⑵がわかるようであれば、この問題でも得点できるだろう極限の問題。

３．複素数と高次方程式

⑴　実数係数の高次方程式が虚数解をもつなら、その共役な複素数も解であることの証明。
　ぜひ得点したい。

⑵　高次方程式をつくって線分の長さの積を表せばいいが、思いつきづらいだろうと思う。

４．確率漸化式

⑴　問題をよく読んで、もっとわかりやすく表現し直して処理すればそれほど難しくない。

⑵　3項間の漸化式を作るタイプで、かなりやりこんでいないと気付きにくい問題。

５．9進数の末尾に並ぶ0の個数

⑴　2017年のセンター試験の問題に2進数の末尾に並ぶ0の個数の問題が出題されている。もし解いた経験があり、思い出すことができれば解くことができたかもしれない。

⑵　かなり難しい証明問題で、⑶のヒントと捉えた方がいいだろう。

⑶　問題の意味を把握できていて、⑵をヒントとして使うことができれば何とか求めることができただろう。

１、３の⑴は過去解いたことがあるはずなので是非得点したい。２は見たことのない関数だが、構わず解いていけば半分くらいは得点できただろう。４の⑴、5の⑴⑶の中のどれかで得点し、全体として5割程度を目指したい。