解答速報

東京慈恵会医科大学（一般）

数学

$\boxed{1}$

ア $\dfrac{14}{125}$　イ $\dfrac{18}{625}$

$\boxed{2}$

（1）　$f(x)=x+\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ を x で微分すると $f'(x)=1+\dfrac{1}{n}f(x)$ となるので

$$h'(x)=-\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}f(x)+e^{-\frac{x}{n}}f'(x)=e^{-\frac{x}{n}}\left\{-\frac{1}{n}f(x)+1+\frac{1}{n}f(x)\right\}=e^{-\frac{x}{n}}$$

$h(x)=\displaystyle\int e^{-\frac{x}{n}}dx=-ne^{-\frac{x}{n}}+C$，$h(0)=e^0f(0)=0$ より $C=n$ だから

$$h(x)=-ne^{-\frac{x}{n}}+n$$

（2）　（1）より $f(x)=e^{\frac{x}{n}}h(x)=n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)$ となるので,

共有点の x 座標を t とおくと，接線が直交するから

$f(t)=g(t)$ より $n\left(e^{-\frac{t}{n}}-1\right)=a\left(e^{-\frac{t}{n}}+1\right)$　…①

$f'(t)\times g'(t)=-1$ より $e^{\frac{t}{n}}\times\left(-\dfrac{a}{n}e^{-\frac{t}{n}}\right)=-\dfrac{a}{n}=-1\ \therefore a=n$

（3）　$a=n$ を①に代入すると $e^{\frac{t}{n}}-1=e^{-\frac{t}{n}}+1$ より $e^{\frac{t}{n}}=1+\sqrt{2}\ \therefore t=n\log\left(1+\sqrt{2}\right)$

よって，$S_n=\displaystyle\int_0^t\{g(x)-f(x)\}dt=\left\{2-2\sqrt{2}+2\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}n^2$ となるので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n^3}=\left\{2-2\sqrt{2}+2\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}$$

$$=\left\{2-2\sqrt{2}+2\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{2-2\sqrt{2}+2\log\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}$$

$\boxed{3}$

$2r^2+3s^2=q^2$となる有理数qが存在すると仮定する。

$2\left(\dfrac{r}{q}\right)^2+3\left(\dfrac{s}{q}\right)^2=1$となり, $\dfrac{r}{q}$, $\dfrac{s}{q}$はそれぞれ有理数となるので,

$\dfrac{r}{q}=\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{s}{q}=\dfrac{k}{l}$とおく。($m, n$は互いに素な整数。$k$, lは互いに素な整数)

よって, $2m^2l^2+3n^2k^2=n^2l^2$

$2m^2l^2=n^2(l^2-3k^2)$であり, n , mは互いに素であるので, $l=an$とおける。(aは整数)

両辺をn^2で割ると$2m^2a^2=a^2n^2-3k^2$

$3k^2=a^2(n^2-2m^2)$

よって,aか(n^2-2m^2)が3の倍数。

(i)　aが3の倍数のとき

$a=3b$とおくと(bは整数)

$k^2=3b^2(n^2-2m^2)$となり, kも3の倍数。aが3の倍数であることよりlも3の倍数であるので,k , lが互いに素であることに矛盾。

(ii)　n^2-2m^2が3の倍数のとき

以下3を法として考えると

$n\equiv 0$ のとき$n\equiv 0$, $n\equiv 1$, 2のとき$n^2\equiv 1$であることより

$n^2\equiv 0$,1　$2m^2\equiv 0$, 2

よって, n^2-2m^2が3の倍数のときn , mはともに3の倍数。

これはn , mが互いに素であることに矛盾。

以上より$2r^2+3s^2=q^2$となる有理数qは存在しない。

よって題意は示された。

$\boxed{4}$

(1)

RはAP上であるので, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(sr\cos\theta\ ,\ sr\sin\theta\ ,\ 1-s)$

RはBQ上であるので, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{t}{r}\cos\theta\ ,\ \dfrac{t}{r}\sin\theta\ ,\ -1+t\right)$

よって, $sr\cos\theta=\dfrac{t}{r}\cos\theta$, $sr\sin\theta=\dfrac{t}{r}\sin\theta$, $1-s=-1+t$を解くと,

$s=\dfrac{2}{r^2+1}$ となり, $R\left(\dfrac{2r\cos\theta}{r^2+1}\ ,\ \dfrac{2r\sin\theta}{r^2+1}\ ,\ \dfrac{r^2-1}{r^2+1}\right)$

よって, $a^2+b^2+c^2=1$

(2)

$r\cos\theta=\dfrac{1}{2}$と仮定から$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$r=\dfrac{1}{2\cos\theta}$となるので, $R\left(\dfrac{1}{r^2+1}\ ,\ \dfrac{\tan\theta}{r^2+1}\ ,\ \dfrac{r^2-1}{r^2+1}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{r^2+1}(4+\tan\theta+r^2-1)$

$r^2=\dfrac{1}{4\cos^2\theta}=\dfrac{1}{4}(1+\tan^2\theta)$より

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{5+\tan^2\theta}(13+4\tan\theta+\tan^2\theta)=1+\dfrac{4\tan\theta+8}{5+\tan^2\theta}$

$f(t)=\dfrac{4t+8}{5+t^2}$とおくと, $f'(t)=\dfrac{-4(t+5)(t-1)}{(5+t^2)^2}$となるので,

t	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=0$より

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$は$\tan\theta=1$のとき最大値3をとる。…(答)

このとき,$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad R\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ $\qquad\cdots a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=-\dfrac{1}{3}$

講評

1．袋に入った番号の書かれた球を 4 回反復して取り出す確率の問題。

（ア）　不等式を満たす整数の組の場合の数を求める。

（イ）　まず頻出の整数問題を解いてから、それを満たす整数の組の場合の数を求める。

いずれも場合の数を求める事ができれば確率を求める事ができる。

2．定積分を含む関数の問題。

(1)　誘導に乗ればいつも通り解くことができる。

(2)　2 直線の直交条件だけであっさり求まる。

(3)　積分の計算は易しいが、多少煩雑なので落ち着いて計算したい。

3．背理法で条件を満たす有理数が存在しないことを証明する問題。

かなり慣れていないと大変なので、途中まででもしっかりと論証したい。

4．空間ベクトル

(1)　2 直線の交点を求める事ができれば答えにたどりつける。

(2)　最初に不等式で範囲を決めて、最大の値をとる変数が存在することを言えばいい。

1．を丁寧に処理して数え落としがないようにし、なんとか完答したい。

2．4．で半分ずつくらいは得点し、3．は最初のとっかかりだけでも解答しておきたい。

全体で 5 割を目指したい。